

بسمه تعالی

سری اول مسائل بخش آنالیز فوریه تاریخ ارسال ۹۳/۷/۱۴ تاریخ تحویل ۹۳/۷/۲۲

۱- الف) سری فوریه تابع $f(x) = x(\pi - x)$, $0 \leq x \leq \pi$ را بنویسید. ب) سری های عددی زیر را نتیجه گیری کنید:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} \pm \dots = \frac{\pi^3}{12}$$

$$1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \dots = \frac{3\sqrt{2}\pi^3}{128}$$

۲- الف) نشان دهید سری فوریه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi} & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}(\pi - x) & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \left\{ \frac{\sin(x)}{1^2} - \frac{\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5x)}{5^2} - \frac{\sin(7x)}{7^2} + \dots \dots \right\}$$

ب) نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

۳- فرم مختلط سری فوریه تابع متناوب با 2π تعریف شده با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x), & -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(0) = 0$$

را بنویسید.

۴- انتگرال فوریه تابع زیر را بنویسید:

$$f(x) = H(a - |x|)$$

۵- الف) فرم معمولی و فرم مختلط سری فوریه تابع متناوب زیر که در یک دوره تناوب با ضابطه زیر داده شده را بیابید:

$$f(x) = \exp[x(1 + 2\pi i)], \quad -1 \leq x \leq 1$$

ب) مجموع هر یک از سری های زیر را به دست آورید:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \pi^2 k^2)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1 + \pi^2 k^2)}$$

۶- الف) نشان دهید سری فوریه تابع $f(x)$ تعریف شده با ضابطه:

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

برابر است با:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(2x) - \left(\frac{2}{\pi}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(4kx)}{(4k^2 - 1)}$$

(ب) نشان دهید:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

(ج) مجموع سری زیر را به دست آورید:

$$\frac{\sin(4x)}{1 \times 2 \times 3} + \frac{\sin(2 \times 4x)}{3 \times 4 \times 5} + \frac{\sin(3 \times 4x)}{5 \times 6 \times 7} + \dots \dots \dots 0 \leq x \leq \pi$$

۷- سری فوریه تابع متناوب تعریف شده با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi + x) & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

سپس با انتگرالگیری نشان دهید

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \begin{cases} \frac{(\pi + x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{(\pi - x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

۸- تابع $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است که با ضابطه $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ تعریف می شود. سری

فوریه $f(x)$ را بیابید و نتیجه بگیرید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = 2, \quad \sum_{n=odd} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = \frac{\pi}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \pi^2 - 8$$

۹- اگر تابع $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π باشد که با ضابطه $f(x) = \cos ax$, $|x| \leq \pi$,

که در آن α عدد صحیح نیست. سری فوریه تابع را بنویسید و ثابت کنید:

$$\frac{\pi}{\sin(\alpha x)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n + \alpha} + \frac{1}{n - 1 - \alpha} \right)$$

$$\pi \cot \alpha \pi = \frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}, \quad \frac{\pi^2}{\sin^2 \alpha \pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n - \alpha)^2}$$